

# Увод у SVM-примери

Ненад Митић

Математички факултет  
nenad@matf.bg.ac.rs

# Пример 1

Одредити екстремне вредности функције  $f(x, y) = 2 - x^2 - 2y^2$  уз ограничење  $g(x, y) = x + y - 1 = 0$

- $L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y) = 2 - x^2 - 2y^2 - \lambda(x + y - 1)$
- решење преко градијента Лагранжијана  
 $\nabla L(x, y, \lambda) = \nabla f(x, y) - \lambda \nabla g(x, y) = 0$

$$\frac{\partial L(x, y, \lambda)}{\partial x} = -2x - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L(x, y, \lambda)}{\partial y} = -4y - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L(x, y, \lambda)}{\partial \lambda} = x + y - 1 = 0$$

- Решење:  $x = \frac{2}{3}, y = \frac{1}{3}, \lambda = \frac{-4}{3}, f = \frac{4}{3}$

# Пример 2

Одредити екстремне вредности функције  $f(x, y) = x + 2y$  уз ограничење  $g(x, y) = x^2 + y^2 - 4 = 0$

- $L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y) = x + 2y - \lambda(x^2 + y^2 - 4)$
- решење преко градијента Лагранжијана  
 $\nabla L(x, y, \lambda) = \nabla f(x, y) - \lambda \nabla g(x, y) = 0$

$$\frac{\partial L(x, y, \lambda)}{\partial x} = 1 - 2\lambda x = 0$$

$$\frac{\partial L(x, y, \lambda)}{\partial y} = 2 - 2\lambda y = 0$$

$$\frac{\partial L(x, y, \lambda)}{\partial \lambda} = -(x^2 + y^2 - 4) = 0$$

- Решење:  $x = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}, y = \pm \frac{4}{\sqrt{5}}, \lambda = \pm \frac{\sqrt{5}}{4}, f_{min} = \frac{-10}{\sqrt{5}}$

# Пример 3

Одредити екстремне вредности функције  $f(x, y) = x^2 + y^2$  уз ограничења  $g_1(x, y) = x + 1 = 0$ ,  $g_2(x, y) = y + 1 = 0$

- $L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda_1 g_1(x, y) - \lambda_2 g_2(x, y) = x^2 + y^2 - \lambda_1(x + 1) - \lambda_2(y + 1)$
- решење преко градијента Лагранжијана  
 $\nabla L(x, y, \lambda) = \nabla f(x, y) - \lambda_1 \nabla g_1(x, y) - \lambda_2 \nabla g_2(x, y) = 0$

$$\frac{\partial L(x, y, \lambda)}{\partial x} = 2x - \lambda_1 = 0$$

$$\frac{\partial L(x, y, \lambda)}{\partial \lambda_1} = x + 1 = 0$$

$$\frac{\partial L(x, y, \lambda)}{\partial y} = 2y - \lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial L(x, y, \lambda)}{\partial \lambda_2} = y + 1 = 0$$

- Решење:  $x = -1, y = -1, \lambda_1 = -2, \lambda_2 = -2, f_{\min} = 2$

# Пример 4

Одредити екстремне вредности функције  $f(x, y) = x^3 + y^2$  уз ограничења  $g_1(x, y) = x^2 - 1 \geq 0$

- $L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y) = x^3 + y^2 - \lambda(x^2 + 1)$
- решење преко градијента Лагранжијана  
 $\nabla L(x, y, \lambda) = \nabla f(x, y) - \lambda \nabla g(x, y) = 0$

$$\frac{\partial L(x, y, \lambda)}{\partial x} = 3x^2 - 2\lambda x = 0$$

$$\frac{\partial L(x, y, \lambda)}{\partial y} = 2y = 0$$

$$\frac{\partial L(x, y, \lambda)}{\partial \lambda} = x^2 - 1 = 0$$

Пошто се ради са неједначинама,  $\lambda \geq 0$

- Решење:  $y = 0, x = \pm 1, y = -1, \lambda = \pm \frac{3}{2}$ . Како  $\lambda \geq 0 \implies x = 1, y = 0, f(x, y) = 1$

# Пример 5

Одредити екстремне вредности функције  $f(x, y) = x^3 + y^3$  уз ограничења  $g_1(x, y) = x^2 - 1 \geq 0$ ,  $g_2(x, y) = y^2 - 1 \geq 0$ ,

- $L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda_1 g_1(x, y) - \lambda_2 g_2(x, y) = x^3 + y^3 - \lambda_1(x^2 - 1) - \lambda_2(y^2 - 1)$
- решење преко градијента Лагранжијана  
 $\nabla L(x, y, \lambda) = \nabla f(x, y) - \lambda_1 \nabla g_1(x, y) - \lambda_2 \nabla g_2(x, y) = 0$

$$\frac{\partial L(x, y, \lambda)}{\partial x} = 3x^2 - 2\lambda_1 x = 0$$

$$\frac{\partial L(x, y, \lambda)}{\partial y} = 3y^2 - 2\lambda_2 y = 0$$

$$\frac{\partial L(x, y, \lambda)}{\partial \lambda_1} = x^2 - 1 = 0$$

$$\frac{\partial L(x, y, \lambda)}{\partial \lambda_2} = y^2 - 1 = 0$$

# Пример 5 (наставак)

Додатни услов је  $\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0$ . Решење је

$\lambda_1 = 0 \vee \lambda_2 = 0$  није могуће јер тада  $x = 0 \vee y = 0$  што није тачно за преостале две једначине

$$x = \pm 1, y = \pm 1, \lambda_1 = \pm \frac{3}{2}$$

$$\text{uslov } \lambda_1 \geq 0 \implies \lambda_1 = \pm \frac{3}{2} \wedge \lambda_2 \geq 0$$

$$\implies x = 1, y = 0, f(x, y) = 2$$

# Пример 6

Одредити екстремне вредности функције  $f(x, y) = (x - 1)^2 + (y - 3)^2$  уз ограничења  $g_1(x, y) = 2 - x - y \geq 0$ ,  $g_2(x, y) = y - x \geq 0$ ,

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda_1 g_1(x, y) - \lambda_2 g_2(x, y) = (x - 1)^2 + (y - 3)^2 - \lambda_1(2 - x - y) - \lambda_2(y - x)$$

Решење преко градијента Лагранжијана

$$\nabla L(x, y, \lambda) = \nabla f(x, y) - \lambda_1 \nabla g_1(x, y) - \lambda_2 \nabla g_2(x, y) = 0$$

Додатни услов је  $\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0$ .



# Пример 6 (наставак)

$$\frac{\partial L(x, y, \lambda)}{\partial x} = 2(x - 1) + \lambda_1 + \lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial L(x, y, \lambda)}{\partial y} = 2(y - 3) + \lambda_1 - \lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial L(x, y, \lambda)}{\partial \lambda_1} = x + y - 2 = 0$$

$$\frac{\partial L(x, y, \lambda)}{\partial \lambda_2} = x - y = 0$$

Решење које задовољава све услове је за  $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0$  је

$$x = 0, y = 2, \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 0, f(x, y) = 2$$

# Пример 1

Нека су у дводимензионом простору дате две тачке  $\bar{x}_1 = (1, 1)$  и  $\bar{x}_2 = (2, 2)$  које припадају различитим класама. Одредити хиперраван која раздваја те две класе.

Према формули за дуални Лагранжов проблем:

$$L(\lambda) = \lambda_1 + \lambda_2 - \frac{1}{2}(\lambda_1 \lambda_1 y_1 y_1 \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_1 + \lambda_1 \lambda_2 y_1 y_2 \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 + \lambda_2 \lambda_1 y_2 y_1 \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_1 + \lambda_2 \lambda_2 y_2 y_2 \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_2)$$

Тачке у различитим класама  $\implies y_1 = 1, y_2 = -1$

$$L(\lambda) = \lambda_1 + \lambda_2 - \frac{1}{2}(\lambda_1^2 \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_1 - \lambda_1 \lambda_2 \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 - \lambda_2 \lambda_1 \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_1 + \lambda_2^2 \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_2)$$

$$L(\lambda) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_2 \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 - \frac{1}{2} \lambda_1^2 \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_1 - \frac{1}{2} \lambda_2^2 \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_2$$

# Пример 1 (наставак)

$$L(\lambda) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_2 \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 - \frac{1}{2} \lambda_1^2 \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_1 - \frac{1}{2} \lambda_2^2 \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_2$$

На основу ККТ мора да буде испуњено  $\lambda_i \geq 0$ , као и да важи ограничење  $-\sum_i \lambda_i y_i = 0$  (у овом случају  $(\lambda_1 - \lambda_2 = 0)$ ). И ово ограничење се додаје у Лагранжијан:

$$L(\lambda, \gamma) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_2 \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 - \frac{1}{2} \lambda_1^2 \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_1 - \frac{1}{2} \lambda_2^2 \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_2 - \gamma(\lambda_1 - \lambda_2)$$

# Пример 1 (наставак)

$$\frac{\partial L(\lambda, \gamma)}{\partial \lambda_1} = 1 + \lambda_2 \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 - \lambda_1 \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_1 - \gamma = 0$$

$$\frac{\partial L(\lambda, \gamma)}{\partial \lambda_2} = 1 + \lambda_1 \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 - \lambda_2 \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_2 + \gamma = 0$$

$$\frac{\partial L(\lambda, \gamma)}{\partial \gamma} = -\lambda_1 + \lambda_2 = 0$$

Како је  $\lambda_1 = \lambda_2$ ,  $\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_1 = 2$ ,  $\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 = 4$ ,  $\bar{x}_2 \cdot \bar{x}_2 = 8$ , добија се систем једначина

$$1 + 4\lambda_1 - 2\lambda_1 - \gamma = 0$$

$$1 + 4\lambda_1 - 8\lambda_1 + \gamma = 0$$

Одакле следи  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ ,  $\gamma = 3$

# Пример 1 (наставак)

Из опште формуле:  $w = \sum_{i=1}^N \lambda_i y_i x_i$  добија се

$$w_1 = 1 - 2, w_2 = 1 - 2, \text{odnosno } w = (-1, -1)$$

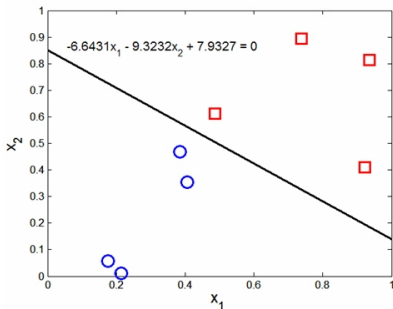
Како су  $\lambda_i > 0$ , важи  $[w \cdot \bar{x}_1 + b] - 1 = 0$ . Одатле

$$b = 1 - w \cdot \bar{x}_1 = 1 - (-1, -1) \cdot (1, 1) = 1 - (-1 - 1) = 3$$

Аналогно, из  $[w \cdot \bar{x}_2 + b] + 1 = 0$  следи

$$b = -1 + w \cdot \bar{x}_2 = -1 + (-1, -1) \cdot (2, 2) = -1 - (-2 - 2) = 3$$

# Одређивање Лагранжових множилаца



Support vectors

x1	x2	y	$\lambda$
0.3858	0.4687	1	65.5261
0.4871	0.611	-1	65.5261
0.9218	0.4103	-1	0
0.7382	0.8936	-1	0
0.1763	0.0579	1	0
0.4057	0.3529	1	0
0.9355	0.8132	-1	0
0.2146	0.0099	1	0

# Одређивање Лагранжових множилаца

## Помоћу CPLEX програма

```
float x[1..2][1..8]=[
    [0.3858,0.4871,0.9218,0.7382,0.1763,0.4057,0.9355,0.2146],
    [0.4687,0.6110,0.4103,0.8936,0.0579,0.3529,0.8132,0.0099]];

dvar float lambda[1..8];
int y[1..8] =[1,-1,-1,-1,1,1,-1,1];

maximize
    sum (i in 1..8) lambda[i]
    - (sum (i in 1..8) sum (j in 1..8) lambda[i] * lambda[j]
        * y[i] * y[j] * (sum (k in 1..2) x[k][i] * x[k][j] ))/2;

subject to {
    ct1: sum (i in 1..8) lambda[i] * y[i]==0;
    lambda[1]>=0; lambda[2]>=0; lambda[3]>=0; lambda[4]>=0;
    lambda[5]>=0; lambda[6]>=0; lambda[7]>=0; lambda[8]>=0;
}
```

# Одређивање Лагранжових множилаца

За добијене вредности  $\lambda = (65.55, 65.55, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$  из опште формуле:

$$w = \sum_{i=1}^N \lambda_i y_i x_i \text{ добија се}$$

$$w_1 = 65.55 \times 1 \times 0.3858 + 65.55 \times -1 \times 0.4871 = -6.64$$

$$w_2 = 65.55 \times 1 \times 0.4687 + 65.55 \times -1 \times 0.6110 = -9.32$$

Како су  $\lambda_i > 0$ , важи  $[w \cdot \bar{x}_1 + b] - 1 = 0$ . Одатле

$$b_1 = 1 - w \cdot \bar{x}_1 = 1 - \langle (-6.64, -9.32), (0.3858, 0.4687) \rangle =$$

$$1 - ((-6.64 \times 0.3858) + (-9.32) \times 0.4687) = 1 - (-2.5617 - 4.3682) = 7.9299$$

Аналогно, из  $[w \cdot \bar{x}_2 + b] + 1 = 0$  следи

$$b_2 = 1 - w \cdot \bar{x}_1 = 1 - \langle (-6.64, -9.32), (0.4871, 0.6110) \rangle =$$

$$-1 - ((-6.64 \times 0.4871) + (-9.32) \times 0.6110) = -1 - (-3.2343 - 5.6945) = 7.9288$$

Добијена вредност за  $b$  је  $b = \text{avg}_i b_i = 7.9293$



# Одређивање Лагранжових множилаца

Одредити једначину хиперравни која раздваја следећи скуп тачака

$x_i$	$x_{i1}$	$x_{i2}$	$y_i$
$x_1$	3.5	4.25	1
$x_2$	4	3	1
$x_3$	4	4.	1
$x_4$	4.5	1.75	1
$x_5$	4.9	4.5	1
$x_6$	5	4	1
$x_7$	5.5	2.5	1
$x_8$	5.5	3.5	1
$x_9$	0.5	1.5	-1
$x_{10}$	1	2.5	-1
$x_{11}$	1.25	9.5	-1
$x_{12}$	1.5	1.5	-1
$x_{13}$	2	2	-1
$x_{14}$	2.5	0.75	-1

$x_i$	$x_{i1}$	$x_{i2}$	$y_i$
$x_{15}$	4	2	1
$x_{16}$	2	3	1
$x_{17}$	3	2	-1
$x_{18}$	5	3	-1